ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Р.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет,

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

alievaraz@yahoo.com

В работе найдены достаточные условия корректной и однозначной разрешимости задачи Неймана для одного класса операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка с переменными коэффициентами. Отметим, что в главной части исследуемого уравнения присутствует коэффициент со скачком при производной второго порядка.

Имеется ряд работ, в которых исследуются операторно-дифференциальные уравнения с разрывным коэффициентом при старшей производной (см., [1], [2]).

В зависимости от места расположения коэффициента с конечным скачком в уравнении появляются разницы в свойствах решений, которые выражаются спектральными характеристиками соответствующих задач. В вышеупомянутых работах наряду с этими исследованиями попутно рассматриваются вопросы разрешимости краевых задач для таких уравнений с условиями сопряжения в точках разрыва коэффициента.

В данной статье рассматривается в сепарабельном гильбертовом пространстве H операторно-дифференциальное уравнение вида

$$-\rho(t)\frac{d^2u(t)}{dt^2}+A^2u(t)+A_1(t)\frac{du(t)}{dt}+A_2(t)u(t)=f(t), \quad t\in R_+=[0;+\infty), \quad (1)$$

при выполнении краевого условия

$$\frac{du(0)}{dt}=0, \quad (2)$$

где $f(t)\in L_2(R_+;H)$, $u(t)\in W_2^2(R_+;H)$, операторы A, $A_1(t)$, $A_2(t)$ - линейные операторы, причем A - самосопряженный положительно-определенный оператор в H, а функция $\rho(t)$ определяется следующим образом:

$$\rho(t)=\begin{cases}\alpha, & если \quad 0\le t\le T,\\ \beta, & если \quad T<t<+\infty,\end{cases}$$

причем α, β - положительные, вообще говоря, не равные друг другу числа. Здесь через $L_2(R_+;H)$ обозначено гильбертово пространство всех вектор-функций, определенных в R_+ со значениями в H, которые имеют конечную норму

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 \, dt \right)^{1/2},$$

а $W_2^2(R_+;H)$-следующее гильбертово пространство:

$$W_2^2(R_+;H) = \left\{ u(t) : \frac{d^2u(t)}{dt^2} \in L_2(R_+;H), A^2u(t) \in L_2(R_+;H) \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} = \left(\left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| A^2u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \right)^{1/2}$$

(об этих пространствах подробнее см. [3, гл. 1]). Производная $u^{(j)} \equiv \dfrac{d^j u}{dt^j}$ понимается в смысле теории обобщенных функций.

Определение 1. *Если вектор-функция $u(t) \in W_2^2(R_+;H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+, тогда ее будем называть регулярным решением уравнения (1).*

Определение 2. *Если при любом $f(t) \in L_2(R_+;H)$ существует регулярное решение уравнения (1), которое удовлетворяет краевому условию (2) в смысле*

$$\lim_{t \to 0} \left\| A^{1/2} \frac{du(t)}{dt} \right\|_H = 0$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const \|f\|_{L_2(R_+;H)},$$

тогда будем говорить, что задача (1), (2) регулярно разрешима.

При исследовании краевой задачи (1), (2), по мере появления аналогии, воспользуемся как результатами, так и методикой доказательства утверждений работы [4], в которой уравнение (1) изучено с краевым условием $u(0)=0$ при $A_j(t) \equiv A_j$, $t \in R_+$.

Введём обозначение

$$\mathrm{Z}_0 u(t) = -\rho(t) \frac{d^2u(t)}{dt^2} + A^2u(t), \quad u(t) \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;\{1\}), \tag{3}$$

где

$$\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;\{1\}) = \left\{ u(t) : u(t) \in W_2^2(R_+;H), \ \frac{du(0)}{dt} = 0 \right\},$$

и укажем достаточные условия на операторные коэффициенты операторно-дифференциального уравнения (1), обеспечивающие регулярную разрешимость краевой задачи (1), (2). При этом оценим нормы операторов промежуточных производных через $\|Z_0 u\|_{L_2(R_+;H)}$ в подпространстве $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;\{1\})$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Оператор* Z_0, *определенный равенством (3), осуществляет изоморфизм между пространствами* $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;\{1\})$ *и* $L_2(R_+;H)$.

Доказательство теоремы наметим вкратце. Нетрудно показать, что решение уравнения $Z_0 u(t) = f(t)$ из пространства $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;\{1\})$ представляется в виде

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = u_\alpha(t) + e^{-\frac{t}{\sqrt{\alpha}}A}\xi_0 + e^{-\frac{T-t}{\sqrt{\alpha}}A}\xi_1 \ , & \text{если } 0 \le t < T, \\ u_2(t) = u_\beta(t) + e^{-\frac{t-T}{\sqrt{\beta}}A}\xi_2 \ , & \text{если } T < t < +\infty, \end{cases}$$

где $u_\alpha(t)$ и $u_\beta(t)$ - решения уравнения $Z_0 u(t) = f(t)$ из пространств $W_2^2([0;T);H)$ и $W_2^2((T;+\infty);H)$, соответственно, а векторы $\xi_j \in D(A^{1/2})$, $j = 0,1,2$ (см., например, [3, гл. 1]) - искомые элементы пространства H. Отметим, что далее в доказательстве можно заимствовать методику доказательства соответствующего утверждения работы [4] с той лишь принципиальной разницей, что здесь, в силу того, что $u(t) \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;\{1\})$, для определения элементов ξ_j, $j = 0,1,2$ имеем следующую систему соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{du(0)}{dt} = \dfrac{du_1(0)}{dt} = 0, \\ u(T) = u_1(T) = u_2(T), \\ \dfrac{du(T)}{dt} = \dfrac{du_1(T)}{dt} = \dfrac{du_2(T)}{dt}. \end{cases}$$

Как ясно становится из теоремы 1, нормы $\|Z_0 u\|_{L_2(R_+;H)}$ и $\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}$ эквивалентны в пространстве $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;\{1\})$.

Далее, возникает задача об оценке норм операторов промежуточных производных через $\|Z_0 u\|_{L_2(R_+;H)}$, имеющая самостоятельный математический интерес.

Теорема 2. *Пусть* $u(t) \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+; H; \{1\})$. *Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\left\| A\frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R_+;H)} \le \gamma_1 \|Z_0 u\|_{L_2(R_+;H)}, \quad \|A^2 u\|_{L_2(R_+;H)} \le \gamma_2 \|Z_0 u\|_{L_2(R_+;H)},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\min^{1/2}(\alpha;\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\max^{1/2}(\alpha;\beta)}{\min^{1/2}(\alpha;\beta)}.$$

Доказательство теоремы не проводим в силу того, что оно, с учетом $u(t) \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+; H; \{1\})$, дословно повторяет соответствующие рассуждения из работы [4].

В результате, принимая во внимание числа γ_j, $j = 1,2$ из теоремы 2, сформулируем теорему о регулярной разрешимости краевой задачи (1), (2).

Теорема 3. *Пусть* A *- самосопряженный положительно-определенный оператор, операторы* $A_j(t)A^{-j}$, $j = 1,2$, *ограничены в* H *и выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2\min^{1/2}(\alpha;\beta)} \sup_t \|A_1(t)A^{-1}\|_{H\to H} + \frac{\max^{1/2}(\alpha;\beta)}{\min^{1/2}(\alpha;\beta)} \sup_t \|A_2(t)A^{-2}\|_{H\to H} < 1.$$

Тогда краевая задача (1), (2) регулярно разрешима.

Доказательство данной теоремы идентично доказательству соответствующей теоремы из работы [4].

Замечание. Несмотря на то, что указанные в статье результаты схожи с результатами работы [4], для их установления приходится преодолеть присущие к данному случаю целый ряд сложностей вычислительного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корниенко В.В. О спектре иррегулярных операторов // Дифференц. уравнения. 1985, т.21, №1, с.65-77.
2. Алиев Б.А. Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с разрывным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2002, т.38, №1, с.58-62.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
4. Aliyev A.R. On the solvability of the boundary-value problem for one class operator-differential equations of the second order with discontinuous coefficient for the second order derivative // Transactions of NAS of Azerbaijan. Ser. of physical-technical and mathematical sciences. 2004, v.24, №7, p.3-8.

BİR SİNİF İKİTƏRTİBLİ ELLİPTİK TİPLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN NEYMAN MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMA ŞƏRTLƏRİ HAQQINDA

A.R.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə bir sinif dəyişən əmsallı ikitərtibli elliptik tipli operator-diferensial tənliklər üçün Neyman məsələsinin korrekt və birqiymətli həll olunmasının kafi şərtləri tapılmışdır. Qeyd edək ki, tədqiq olunan tənliyin baş hissəsində iki tərtibli törəmə yanında sıçrayışa malik əmsal iştirak edir.

ON SOLVABILITY CONDITIONS OF NEUMANN PROBLEM FOR A CLASS OF SECOND ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE

A.R.ALIYEV

SUMMARY

Sufficient conditions of correct and unique solvability of Neumann problem are found for a class of second order operator-differential equations of elliptic type with variable coefficients. It should be noted that, the principal part of the equation contains a step coefficient at the second order derivative.